



مثال

لنأخذ الفضاء الطوبولوجي  $\mathbb{R}$  ونعرف  $\mathcal{P}$  علاقة تكافؤ  $p$  في الخواص التالية:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

أي لغير المتضمنين  $x, y$  متكافئين إذا كان الفرق بينهما عدداً عادياً.

$$[x] = \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\} \quad x \in \mathbb{R}$$

كل صف تكافؤ هو عنصر واحد في مجموعة القسمة بينما هو مجموعة جزئية في  $\mathbb{R}$  ولأنه المجموعة ستيف لان  $\mathbb{Q}$  ستيف.

\* نبين أن طوبولوجيا القسمة هي طوبولوجيا ستيف أي

$$\mathcal{Z}/\mathcal{P} = \{\emptyset, \mathbb{R}/\mathcal{P}\}$$

الأنشآت: نأخذ مجموعة مغلقة غير خالية  $F$  في  $\mathbb{R}/\mathcal{P}$

$$\mathcal{X}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathcal{P}$$

$$\mathcal{X}(x) = [x]$$

هذا التطبيق سما نعلم معمر وبالتالي الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة وفقة هي مجموعة مغلقة  $\mathcal{X}^{-1}(F)$  مغلقة

وبما أنها مغلقة فإن  $\mathcal{X}^{-1}(F) = \overline{\mathcal{X}^{-1}(F)} = \mathbb{R}$  وهي مجموعة ستيف وبالتالي فإن  $F = \mathbb{R}/\mathcal{P}$  معنى ذلك أن  $\mathbb{R}/\mathcal{P}$  هذا الفضاء مجموعتين مغلقتين فقط هما  $\emptyset$  و  $\mathbb{R}/\mathcal{P}$  وبالتالي الطوبولوجيا ستيف.

فضاء الجداء:

لنقرض أن لدينا أسرة من الفضاءات الطوبولوجية  $\{X_\alpha, \mathcal{Z}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  و  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعات  $X_\alpha$

بقصد السهولة سنبدأ بحالة قضائين اثنين.

ليكن لدينا  $(X_1, \mathcal{Z}_1)$  و  $(X_2, \mathcal{Z}_2)$  فضائين طوبولوجيين و  $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$  فنفسر  $B$  لأسرة المجموعات من الشكل:

$$\{u, x, u_2, u_1, C, \mathcal{Z}_1, u_2 \in \mathcal{Z}_2\}$$

من الواضح أن تقاطع أي مجموعتين في عناصر الأسرة  $B$  هو مجموعة من عناصر  $B$

استناداً إلى مبرهنة سابقة فإن الأسرة  $B$  شكلاً قاعدة لطوبولوجيا على المجموعة  $X$  (مجموعة الجداء الديكارتي) نسمي طوبولوجيا الجداء.

أي شكلاً من الفضائين  $X_1, X_2$  يسمى فضاءاً إحداثياً أو مركبة لنأخذ التطبيق:



$$P_1 : X = X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$$

$$P_1(X_1, X_2) = X_1$$

$$P_2 : X = X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$$

$$P_2(X_1, X_2) = X_2$$

حيث  $P_1, P_2$  تطبيقان إسقاط  $X_1, X_2$  إن تطبيقا الإسقاط  $P_1, P_2$  متممات بالنسبة لطوبولوجيا الجداء  $P$  مستمرة لأنه إذا كان  $U_i \in \mathcal{T}_i$  فإن هورتيا التي هي وصف التطبيق  $P_i$  أي  $P_i(U_i) = X_1 \times X_2$  وهو عنصر من عناصر طوبولوجيا الجداء أي أنه مجموعة مفتوحة. وبالتالي فإن التطبيق  $P$  مستمر وبشكل مماثل نبرهن أن  $P_2$  مستمر.

\* يمكن نعيم الحالة السابقة إلى حالة أي عدد من الفضاءات الطوبولوجية.

أي: إذا كانت لدينا أسرة من الفضاءات الطوبولوجية

$(X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j), (X_k, \mathcal{T}_k) \dots (X_n, \mathcal{T}_n)$  فإننا نستطيع تعريف الطوبولوجيا على مجموعته

الجداء الديكارتي:

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

فستطيع تعريف الطوبولوجيا على جداء ديكارتي بواسطة  $B$

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n : U_i \in \mathcal{T}_i \}$$

هذه الأسرة تشكل قاعدة لطوبولوجيا على  $X$  هي قاعدة طوبولوجيا الجداء

وتكون لطبيعة الحال جميع تطبيقات الإسقاط مستمرة

$$P_i : X \longrightarrow X_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

**نتقل الآن إلى حالة الجداءات اللانهائية**

هنا لا نستطيع أن نعيم الحالة السابقة بشكل تلقائي لأن جداء لانهائي

من المجموعات المقنونة ليست بالضرورة أن تكون مجموعته مفتوحة.

لبرهن بسهولة أن جميع تطبيقات الإسقاط مفتوحة  $P_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$

$U$  مفتوحة في  $X$  فإن الصورة المباشرة لها هي

$$P_\alpha(U) = \begin{cases} X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \\ U_\alpha \in \mathcal{T} \end{cases}$$

مجموعة مفتوحة

**ملاحظة:** أن تطبيق الإسقاط ليس من الضروري أن يكون مغلقاً وسننظر

المثال التالي:



Date :

/ /

550

Subject :

**مثال ١** لتأخذ في المستوى  $\mathbb{R}^2$  المنحنى  $C$  معطى بالمعادلة

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x > 0$$

$C$  مجموعة مغلقة ومكتظها على المحور الأفقي أو التافوي هو

$[0, 1] \times \{0\}$  و  $\{1\} \times [0, 1]$  وهذه المجموعات غير متصلة أي هاتان

فقطا متصلة مجموعة مغلقة ليست مغلقة لكن هاتان متصلة ومتصلة